

1 (60点)

正の整数に関する条件

(\*) 10進法で表したときに、どの位にも数字9が現れない

を考える、以下の問いに答えよ。

(1)  $k$ を正の整数とすると、 $10^{k-1}$ 以上かつ $10^k$ 未満であって条件(\*)を満たす正の整数の個数を $a_k$ とする。このとき、 $a_k$ を $k$ の式で表せ。

(2) 正の整数 $n$ に対して、

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n \text{ が条件(*)を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件(*)を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく、このとき、すべての正の整数 $k$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$